二次方程式を定規とコンパスで解く

Solving quadratic equation with a ruler and a compass

福　井　誠　一（教育学部数学教室），上野山　好美（教育学研究科数学教育）
Seiichi FUKUI, Yoshimi UENOYAMA

この報告は，Euclidの時代からの初等幾何学の作図可能な問題，および，作図不可能な問題をもとに，二次方程式の解法の一例を示すことを目的としている。その解法を述べるにあたって，まず，作図問題の定義を明らかにし，その上で，作図可能な問題と作図不可能な問題，および，問題の不成立についていくつかの例を示した。特に，示した例においてはEuclid以後に研究されたものも示しておいた。次に，二次方程式においても，作図可能な場合と不可能な場合があるため，作図可能な場合の条件をもとに，二次方程式を分類した。最後に，分類された二次方程式をそれぞれの場合について，定規とコンパスのみを用いて描いた作図を用いて，解の公式などは一切使用せずに，実際に二次方程式の解法をまとめています。

キーワード：作図可能，作図不可能，二次方程式

1．はじめに

これから述べる定規とコンパスを用いての二次方程式の解法は，以前（昭和３０年頃）には，高等学校の数学の教科書に掲載されており（例えば［３］），当時は指導されていたようである。現在の学生には，このような解法は大変珍しく，新鮮なものにうつるようであった。実際，数学教育で扱う内容において，指導される内容は，しだいに，初等幾何学的な内容が姿を消すようになり，その代わりに，高等学校においてはベクトルが導入された。中学校においても以前は，三角形の合同を用いて証明されていた内容が，三角形の相似を用いた証明に移行してきた。したがって，現在の若者は，初等幾何学的な内容に触れる機会がまったく少なくなってきている。そこで，若者に（特に数学を指導する立場の者に），これを伝えたいという気持ちになり執筆することにした。

2．作図問題

Euclid幾何学における問題の解き方は，公理から論理に従って得られた定理を組み合わせて結果（結論）を導いていく。そして，その推論に図を用いることが多い。
そこで，古くから多くの幾何学的問題を，直線を引くことと，円を描くことで解く方法が考えられてきた。これを作図問題という。図形を描くときの基本的方法は，２点を通る直

線を引くことと，円を描くことであって，与えられた条件に適合する図形を描くことを作図問題を解くといい，解いて得られた図形を作図問題の解という。
２点を通る直線を引くことは定規を用い，円を描くにはコンパスを用いる。それゆえに，作図問題とは『定規とコンパスを有限回用いて問題を解く方法を与えることである。』としてよい。

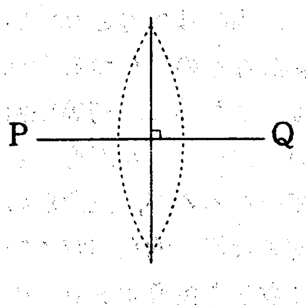
（トピック）

今から，2500年前のギリシャでは，目盛りのついた定規や分度器，あるいは，種々の器具の使用を一切禁止し，「定規とコンパスだけを有限回使って作図する」という図形の研究がはじまった。一体，何故，直線を引く定規と円を描くコンパスだけで作図しようとしたのであろうか。それは，ギリシャの幾何学がエジプトの測量術を輸入し，それを純化して，論理的に構成していったためで，その発達の過程で，実験・実測的なものを捨象したからであろう。すなわち，本質的なもの以外は考慮されなかった。

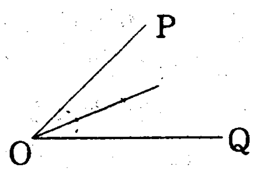
３．作図可能な例と不可能な例

作図問題には，多くの例がある。そのうちのいくつかの例を示しておく。

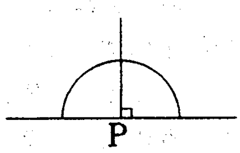
(1)　線分の垂直二等分線
(2)　与えられた角の二等分線
(3)　与えられた直線上の与えられた点から垂線をたてる
(4)　与えられた直線上にない点から直線に垂線をおろす
(5)　与えられた直線上にない点を通る平行線を引く
(6)　自然数ｎに対して，円に内接する正ｎ角形を作る



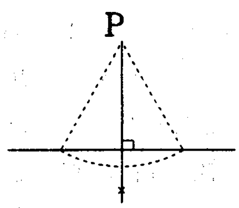
（1）



（2）



（3）



（4）

(1)～(5)は，作図可能問題（problem of possible construction）であり，作図可能問題とは，作図する方法がある場合をいう。(6)のように，

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
可能	○	○	○	○	×	○	×	○	×	○	×	×	○	…

（○：作図可能，×作図不可能）

あるnの場合，円に内接する正n角形は，いつも存在するにもかかわらず，これを作図することができないとき，作図不可能(problem of impossible construction)という。

これは，定規とコンパスで作図するアルゴリズムが存在しないということであり，実際に，求める図形が存在しないときは，この問題は不成立(inconsistent)であるという。

（注意）

(6)が解けるためには，nの素因数分解が$n=2^{\lambda}p_1\cdots p_k$（$\lambda\geqq 0$，$p\cdots p_k$は，すべて異なる$2^h+1$の形の素数（Fermat数)）となることが必要十分である。

［Gaussの定理］

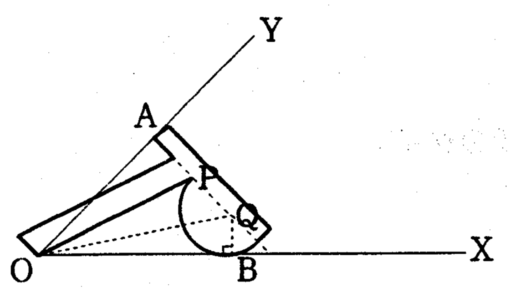
4．ギリシャの三大問題

さて，実際に多くの学者が作図を研究する中で，いくつもの発見とともに，当然ながら難問にもぶちあたった。その中で，簡単にして大難問であった次の3つに対して『ギリシャの三大作図不可能問題』という名誉ある称号が与えられた。紀元前4世紀ごろのことという。

i）角の3等分・・・・・任意に与えられた角を3等分すること
ii）円積問題・・・・・・与えられた円と面積の等しい正方形を作図すること
iii）立方体倍積問題・・・与えられた立方体の2倍の体積をもつ立方体を作図すること

i）とiii）が作図不可能なことは，P.L.Wantzel（1837）が，三次方程式の根を作図により求めることが不可能なことから証明し，ii）については，C.L.F.Lindemann（1882）が，πが超越数であることから証明した。［1］

しかし，i）については，器具を用いれば作図できることが知られている。これは，ルール違反であるが，次に示しておく。



$\triangle AOP\equiv\triangle QOP$

$\therefore\ \angle AOP=\angle QOP$ ・・・①

$\triangle POQ\equiv\triangle BOQ$

$\therefore\ \angle POQ=\angle BOQ$ ・・・②

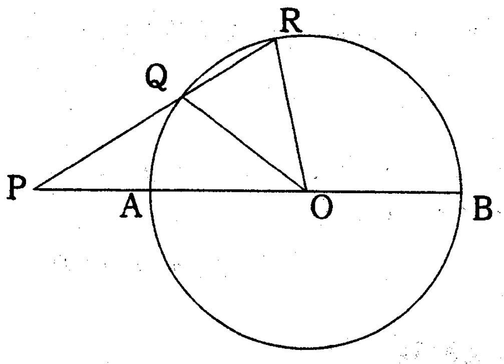
①，②より，

$\angle AOP=\angle QOP=\angle BOQ$

よって，角の3等分ができる。

ただし，この器具はT定規とQを中心としPQを半径とする半円からできているものとする。

苦心の末，次のように作図して角ＢＯＲの３分の１の角を作るところまで，こぎつけた。



＜作図の仕方＞

直径ＡＢの延長線上にＰＱを半径に等しくとる。直線ＰＱの延長と円Ｏの交点をＲとし，半径ＯＲをとると，

$$\angle QOA = a^\circ$$

とすると，二等辺三角形の底角と外角の性質を用いると，

$$\angle OQR = \angle ORQ = 2a^\circ$$

よって，

$$\angle BOR = 3a^\circ$$

したがって，角ＢＯＲの３分の１の大きさの角は，角ＱＯＡ（ＱＰＡ）である。

しかし，これでは結果的に角ａが角ＢＯＲの３分の１になっているだけで，角ＢＯＲを作ってから作図したことになっていない。

Euclidから後になって，定規とコンパスによる作図でなく，単に，定規だけとか，コンパスだけによる作図が研究されてきた。その主な結果を述べておくと，

1）定規のみを用いて与えられた線分を二等分することはできない。（D.Hilbert)
2）一つの完全に描かれた円と，その中心Ｏとが与えられたとき，定規とコンパスとを用いて解ける初等幾何学的作図はすべて定規のみを用いて解ける。（Steiner)
3）中心なしで描かれて与えられた２円が出会わないときは，定規のみを用いて，その中心を見出すことはできない。もし，２円が相交わり，又は，相接するときは，その中心は定規の使用のみによって求められる。（D.Cauer)
4）定規とコンパスの使用によって解かれる作図問題は，コンパスのみの使用によって解かれる。（L.Mascheroni)

などである。（［２］参照)

５．二次方程式のタイプ

作図可能な範囲は，集合を順に拡張していくと，

Ｎ　：自然数
Ｚ　：整数
$Q(\sqrt{m})$：平方根

となり，これらすべてを含む集合をＭとする。すなわち，Ｍを定規とコンパスで実現できる数の集合とする。

今，任意の二次方程式を

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (1)$$

とし，$A \in M$，$B \in M$，$C \in M$であるとする。このとき，

$$x \in M \quad , \quad x > 0 \qquad (2)$$

であることに注意する。

二次方程式$Ax^2+Bx+C=0$は根の条件により，二次方程式

$$x^2+px+q=0 \tag{3}$$

と同値である。（ただし，$p=B/A$ ，$q=C/A$）

まず，二次方程式$Ax^2+Bx+C=0$が実数解をもつためには，判別式D_1は，

$$D_1=B^2-4AC\geqq 0 \tag{4}$$

すなわち，二次方程式$x+px+q=0$が実数解をもつためには，判別式D_2は，

$$D_2=p^2-4q\geqq 0 \tag{5}$$

の条件が必要である。

また，2根がともに負の根でないためには，2根をそれぞれα，βとすると，根と係数の関係により，

$$\alpha+\beta=-A/B=-p<0,\ かつ,\ \alpha\beta=C/A=q>0 \tag{6}$$

でないことである。

この条件の下で，任意の二次方程式は次の4つのタイプに分類される。

(1)$x^2=ab$

(2)$x(a-x)=b^2$

(3)$x(x-a)=b^2$

(4)$x(x+a)=b^2$

ただし，$a\in M$,$b\in M$,$x\in M$,とする。

6．二次方程式を作図で解く

では，実際に前節において，4つのタイプに分類された二次方程式について解くことにする。

長さa，長さbをもつ任意の線分は，定規とコンパスをもちいることによって，作図することができるとする。

(1)$x^2=ab$の場合

アルゴリズム（操作）

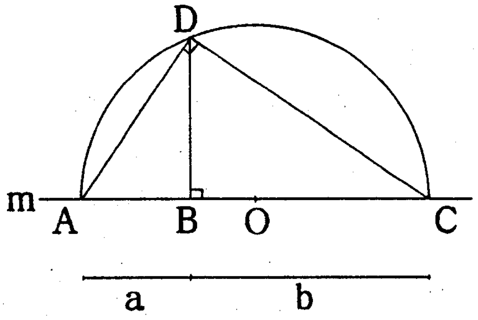
①直線mを引く。

②直線m上に長さa，長さbをもつ線分AB，線分BCをとる。

③線分ACの中点をOとし，ACを直径にもつ半円を描く。

④点Bから半円に向かって垂線を立て，半円との交点をDとする。

⑤AとD，DとCをそれぞれ結ぶ。



このとき，

△ABCと△DBCは，２角が等しいので

△ABC∽△DBC

である。よって，

AB：DB＝DB：BC

が成立する。

いま，DBの長さをxとすると，

$a : x = x : b$

となり，すなわち，

$x^2 = ab$

である。

(2) $x(a-x)=b^2$ の場合

アルゴリズム（操作）

①長さaをもつ線分ABを描く。

②点Aから長さbの垂線ACを立てる。

③点Cを通り，線分ABに平行な直線CDを引く。

④線分ABの中点をOとし，線分ABが直径となる半円を描く。

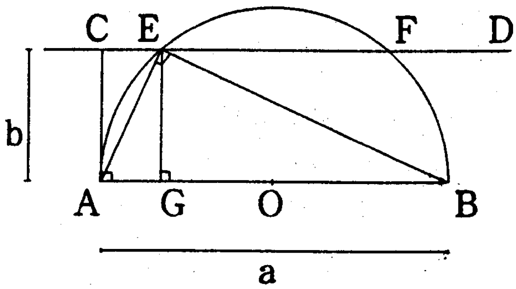
⑤直径CDと半円との交点をそれぞれE，Fとし，EとA，EとBを結ぶ

⑥Eから線分ABに垂線を降ろし，その足をGとする。

（注意）直線CDと半円が２点で交わるためには，条件

$a/2 > b$

を満たさなければならない。



このとき，

△AGEと△EGBは，２角が等しいので

△AGE∽△EGB

である。よって，

AG：GE＝EG：GB

が成立する。

いま，AGの長さをxとすると，GBの長さは，GB＝a－xとなり，

$x : b = b : a-x$

が成立する。すなわち，

$x(a-x)=b^2$

である。

(3) $x(x-a)=b^2$ の場合

アルゴリズム（操作）

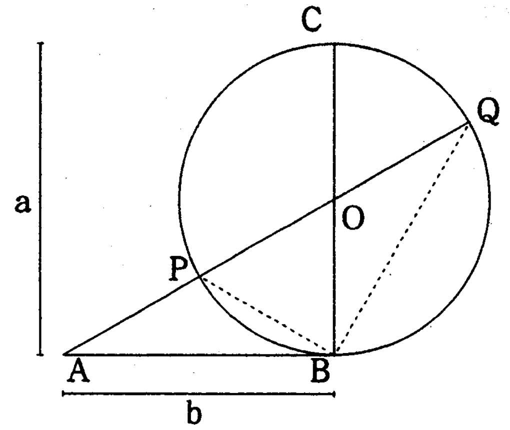
①長さbをもつ線分ABを引く。

②点Bにおいて，線分ABに接する直径aの円Oを描く。

③中心Oと接点Bを結び，OBの延長と円との交点をCとする。

④中心Oと点Aを結ぶ直線を引く。

⑤線分AOと円の交点をPとし，AOの延長と円との交点をQをする。



このとき，BとQ，BとRを結ぶと，

△AQBと△ABPにおいて，

∠QAB＝∠BAP（共角）

∠AQB＝∠ABP（接弦定理）

となり，2角が等しいので

△AQB∽△ABP

である。よって，

AB：AP＝AQ：AB

が成立する。

いま，AQの長さをxとすると，APの長さは，$AP=x-a$ となり，

$$b : x-a = x : b$$

が成立する。すなわち，

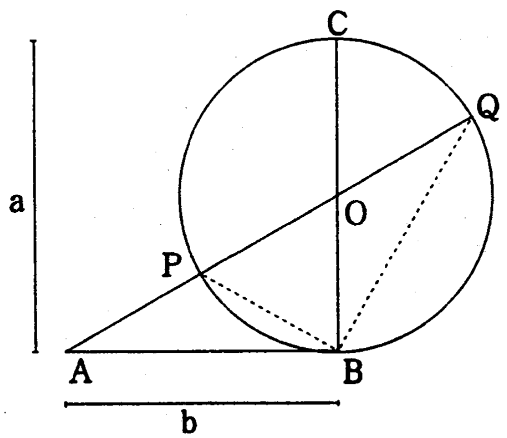
$$x(x-a)=b^2$$

である。

(4) $x(x+a)=b$ の場合

アルゴリズム（操作）

(3)の場合と同様



このとき，(3)より，

△AQB∽△ABP

である。よって，

AB：AP＝AQ：AB

が成立する。

いま，APの長さをxとすると，AQの長さは，$AQ=x+a$ となり，

$$b : x = x+a : b$$

が成立する。すなわち，

$$x(x+a)=b^2$$

である。

（注意）(3)，(4)において，便宜上，直線ＡＰＱが中心Ｏを通るように作図したが，一般的には，中心を通らなくても△ＡＰＱ∽△ＡＢＰより，

$$AB : AP = AQ : AB$$

が成立している。

参考文献

［１］一松信編：新数学事典，大阪書籍（1979）pp.320－321

［２］窪田忠彦:"初等幾何学作図問題"，内田老鶴圃（1952）

［３］数研出版 "高等学校 数学Ｉ(幾何編)",昭和33年